1. GENERALITES

Les Ensembles, éléments, parties d'un ensemble de fonctions.

Depuis la fin du XIXe siècle, les ensembles sont devenus la notion fondamentale des mathématiques. On définit souvent un ensemble comme une collection d'objets caractérisés par une propriété commune.
Il y a par exemple, l'ensemble des nombres pairs, l'ensemble des nombres entiers compris entre 7 et 24, l'ensemble des droites du plan…
Cette façon de s'exprimer, trop vague, peut s'avérer dangereuse et peut laisser croire que n'importe quoi est un ensemble, ce qui conduit à des contradictions.

A l'aube du XXe siècle, il devint nécessaire de préciser toutes les notions, même les plus élémentaires, aussi, on a fini par admettre qu'une propriété commune quelconque ne permet pas toujours de définir un ensemble.

Les ensembles les plus importants, ceux qui servent de références, portent des noms qui leur sont propres et sont représenté par des lettres :

B : l'ensemble des bits – B={0,1}

N : l'ensemble des entiers naturels – N={0,1,2,…}

Z : l'ensemble des relatifs – Z={…,-2,-1,0,1,2,…}

R : l'ensemble des nombres réels.

Les objets qui constituent un ensemble sont appelés les éléments de cet ensemble.
Pour indiquer qu'un objet x est un élément d'un ensemble A, on écrit $x \in A$, qui se lit « appartient à » ; la négation s'écrit $x \notin$ **A.**

Il existe deux moyens pour définir un ensemble particulier :
Le premier, s'il est possible, est l'écriture de tous les éléments (B)
Le deuxième, consiste en l'écriture de la propriété qui caractérise les éléments
Exemple : N : $\{x : x \text{ est entier}, x \geqslant 0\}$

L'ensemble qui ne compte aucun élément est l'ensemble vide. On le note **Ø**

Autres points :

- Deux ensembles A et B sont égaux <u>Si et seulement Si</u> ils sont constitués des mêmes éléments. On écrit alors A=B

- Si chaque élément de l'ensemble A est aussi élément d'un ensemble B, on dit que A est inclus dans B (ou que A est contenu dans B). On écrit alors $A \subset B$ ou $B \supset A$
  A est alors une <u>partie</u> ou <u>sous-ensemble</u> de B.

- Les fonctions sont le moyen par lequel les ensembles communiquent entre eux.
  On représente souvent une fonction par une lettre (F,G,…)

  On dit que si F est une fonction de A vers B,
  on écrit $F : A \rightarrow B$
  et l'on peut dire que F transforme A en B
  Lien avec l'élément :
  Si $x \in A$, l'unique élément de B qui est lié à x par la fonction F est appelé :
  <u>image de x par la fonction F</u>, ou <u>valeur de F pour x</u>
  Sa représentation est F(x)

- Les opérations sur les ensembles
  Produits d'ensembles :

  Avec deux ensembles A et B, on peut toujours construire un nouvel ensemble qu'on appelle le produit de A par B et que l'on note AxB.
  Ses éléments sont les couples (a,b) formés d'un élément a de A, et b de B.
  Exemple :
  Si A={Z,T} et B={1,2,3}
  Les éléments AxB sont les 6 couples (Z,1),(Z,2),(Z,3),(T,1),(T,2),(T,3)
  Les éléments BxA sont (1,Z),(1,T),(2,Z),(2,T),(3,Z),(3,T)

- L'union ou réunion de deux ensembles A et B notée A **∪ B** est l'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à A ou B
  Ici « ou » est employé avec le sens et/ou

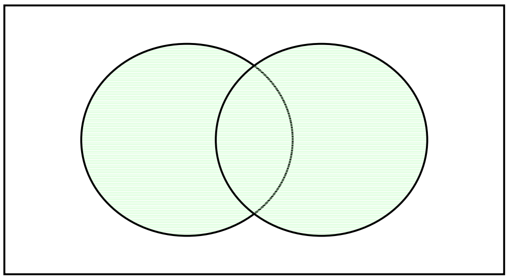
- L'intersection de deux ensembles A et B symbolisée par **A** ∩ **B** est l'ensemble constitué des éléments appartenant à A et B
  Si **A** ∩ **B** = **Ø**
  C'est à dire que A et B n'ont aucun élément en commun, on dit que A et B sont disjoints.

- La différence entre A et B notée A / B ou (A-B) est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A mais qui n'appartiennent pas à B :

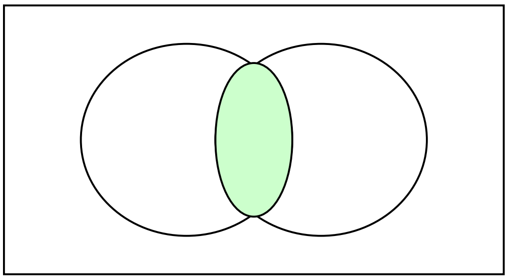
  $A/B=\{x : x \in A \text{ et } x \notin B\}$
  Donc
  $A/B = A \cap \overline{B}$ ($\overline{B}$: complémentaire de B)

- Tous les ensembles sont à un instant donné, des sous-ensembles d'un univers particulier que l'on note U.
  Donc : Le complémentaire de A dans U est appelé $\bar{A}$

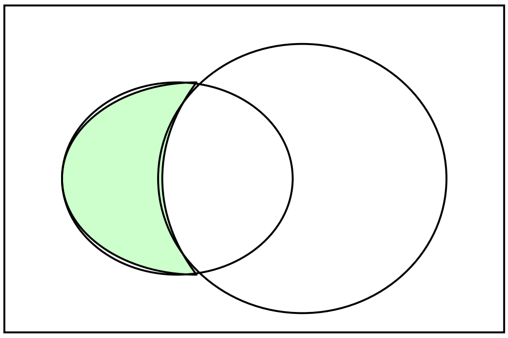
<u>DIAGRAMMES DE VENN :</u>



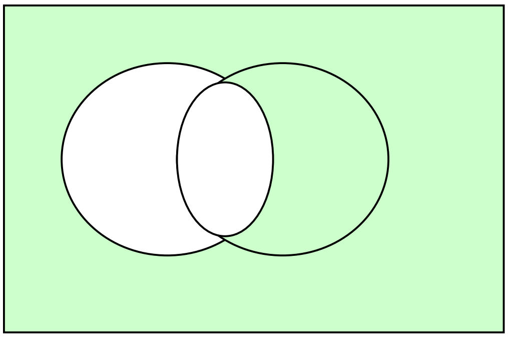
A ∪ B



A ∩ B



A/B
(A soustrait de B)



Ā

Le cadre représente mon univers U ou sont représentés deux ensembles A et B

Supposons que A={1,2,3,4} et B={3,4,5,6}

Où U={1,2,3,...} est l'ensemble des entiers positifs.

Alors :

A **∪** B : {1,2,3,4,5,6}

A ∩ B : {3,4}

A / B : {1,2}

Ā : {5,6,7,8,...}

Les ensembles finis, cardinal d'un ensemble, principe de dénombrement

- Un ensemble est dit fini s'il contient exactement *n* éléments distincts où *n* représente un entier positif.
  Dans le cas contraire, il s'agit d'un ensemble infini.

  Par Exemple :
  L'ensemble vide **Ø** et l'ensemble des lettres de l'alphabet
  sont des ensembles finis {0} et {26}
  alors que celui des nombres entiers pairs positifs {2,4,6,…} est infini.

- Si A est un ensemble fini, le nombre de ses éléments est appelé Cardinal de A
  card(A) = n

- Si A et B sont des ensembles finis disjoints, ils n'ont aucun élément en commun, alors $A \cup B$ est fini et :
  $\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B)$

- Si A et B sont des ensembles finis, alors $A \cup B$ et $A \cap B$ sont finis et :
  $\text{Card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B)$

- Si A et B et C sont des ensembles finis, il en est de même pour $A \cup B \cup C$ et

$$\begin{aligned}\text{Card}(A \cup B \cup C) = \; & \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) \\ & - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) \\ & + \text{card}(A \cap B \cap C)\end{aligned}$$

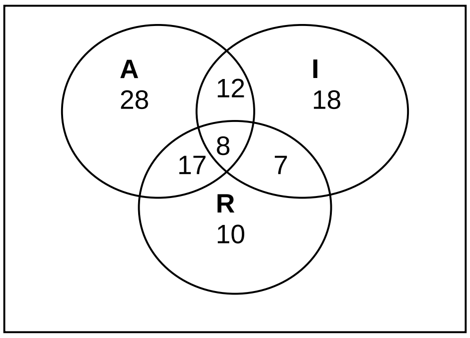
<u>Les ensembles finis, cardinal d'un ensemble, principe de dénombrement (suite)</u>

<u>Exemple tp1 :</u>

Supposons que 100 des 120 étudiants en mathématiques d'un collège apprennent au moins une langue étrangère parmi l'anglais, l'italien, le russe.
Supposons alors que :
Les ensembles des étudiants apprenant l'anglais, l'italien et le russe sont respectivement appelés A, I, et R.

65 apprennent l'anglais :	Card(A) = 65	
45 apprennent l'italien :	Card(I) = 45	
42 apprennent le russe :	Card(R) = 42	Card(A ∪ I ∪ R) = 100
20 apprennent l'anglais et l'italien :	Card(A ∩ I) = 20	
25 apprennent l'anglais et le russe :	Card(A ∩ R) = 25	
15 apprennent l'italien et le russe :	Card(I ∩ R) = 15	

Nous souhaitons connaître le nombre d'étudiants inscrits à ces trois langues, pour remplir correctement le diagramme de Venn ci-contre :



<u>Recherche :</u>

Card(A ∩ I ∩ R) = Card(A **∪** I **∪** R) - Card(A) - Card(I) - Card(R)
+ Card(A ∩ I) + Card(A ∩ R) + Card(I ∩ R)

Card(A ∩ I ∩ R) = 100 - 65 - 45 - 42 + 20 + 25 + 15 = 8
8 étudiants sont inscrits aux 3 cours

Card(A ∩ I)- Card(A ∩ I ∩ R)
20-8 = 12 étudiants sont inscrits en Anglais et Italien mais pas en Russe

Card(A ∩ R) - Card(A ∩ I ∩ R)
25-8 = 17 étudiants sont inscrits en Anglais et Russe mais pas en Italien

Card(I ∩ R) - Card(A ∩ I ∩ R)
15-8 = 7 étudiants sont inscrits en Italien et Russe mais pas en Anglais

Card(A)-(Card(A ∩ I)-Card(A ∩ I ∩ R))-Card(A ∩ I ∩ R)-(Card(A ∩ R)-Card(A ∩ I ∩ R))
65-12-8-17 = 28 étudiants sont inscrits seulement en Anglais

Card(I)-(Card(A ∩ I)-Card(A ∩ I ∩ R))-Card(A ∩ I ∩ R)-(Card(I ∩ R)-Card(A ∩ I ∩ R))
45-12-8-7 = 18 étudiants sont inscrits seulement en Italien

Card(R)-(Card(A ∩ R)-Card(A ∩ I ∩ R))-Card(A ∩ I ∩ R)-(Card(I ∩ R)-Card(A ∩ I ∩ R))
42-17-8-7 = 10 étudiants sont inscrits seulement en Russe

Card(U)- Card(A ∪ I ∪ R))
120-100 = 20 étudiants ne sont inscrits à aucun cours

***** 28+18+10 = 56 étudiants sont inscrits seulement à une Langue

Exercice 1.1 :

Donner la liste des éléments des ensembles suivants, pour N = {1,2,3,…}

A = {x : $x \in$ N, 3 < x < 12}

B = {x : $x \in$ N, x est pair, x < 15}

C = {x : $x \in$ N, 4 + x =3}

:

A={4,5,6,7,8,9,10,11}

B={2,4,6,8,10,12,14}

C={ Ø }

Exercice 1.2 :

Soient les ensembles :

Ø, A= { 1}, B= { 1,3}, C= { 1,5,9}, D= { 1,2,3,4,5}, E= { 1,3,5,7,9}, et U = { 1,2,…,8,9}

Insérez le symbole correct $\subset$ ou $\not\subset$entre les paires suivantes : ØA, AB, BC, BE, CD, CE, DE, DU

:

{ Ø,1} $\subset$ {1,3} $\not\subset$ {1,5,9} $\subset$ {1,3,5,7,9} $\not\subset$ {1,2,3,4,5,9} $\not\subset$ {1,3,5,7,9} $\subset$ {1,2,3,4,5,7,9} $\subset$

ØA AB BC BE CD CE DE

{1,…,9}, ou {1,2,3,4,5,6,7,8,9}

DU DU

Exercice 1.3 :

Ecrire chacune des fonctions suivantes de R dans R à l'aide d'une formule :

F attribue à chaque nombre son cube, G attribue à chaque nombre la valeur 5

Trouver : F(4), F(-2), F(0), G(4), G(-2), G(0)

:

F(4)= 4x4x4 = 64

F(-2)= -2x-2x-2 = -8

F(0)= 0x0x0 =0

G(4)= 5

G(-2)= 5

G(0)=5

Exercice 1.4 :

Soient U = { 1,2,3,4,…,8,9} et A = { 1,2,3,4,5}, B = { 4,5,6,7}, C = { 5,6,7,8,9}, D = { 1,3,5,7,9}, E = { 2,4,6,8}, F = { 1,5,9}

Trouver : **A ∪ B, A ∩ B, $\bar{A}$, $\overline{B}$, A ∩ (B ∪ E), D ∪ E, D ∩ E, D ∪ F, D ∩ F, A\B, B\A, D\E, F\D, $\overline{A \backslash E}$, (A ∩ D)\B, (B ∩ F) ∪ (C ∩ E)**

:

A ∪ B = {1,2,3,4,5,6,7}

A ∩ B = {4,5}

D ∪ E = {1,…,9} = U

D ∩ E = {Ø}

D ∪ F = {1,3,5,7,9} = D

D ∩ F = {1,5,9} = F

$\bar{A}$ = {6,7,8,9}

$\overline{B}$ = {1,2,3,8,9}

A\B = {1,2,3}

B\A = {6,7}

D\E = {1,3,5,7,9} = D

F\D = {Ø}

A ∩ (B ∪ E) = {2,4,5}

A ∩ {2,4,5,6,7,8}

$\overline{A \backslash E}$ = {2,4,6,7,8,9}

A \E = {1,3,5}

(A ∩ D)\B = {1,3}

{1,3,5}

(B ∩ F) ∪ (C ∩ E) = {5,6,8}

{5} ∪ {6,8}

Exercice 1.5 :

Etand donné :

A = {Ann, Alice, Audrey}, B = {Ann, Audrey, Ellen}, C = {Alice, Audrey, Betty, Ellen}, D = {Ann, Alice, Betty, Ellen} :

(A ∪ B)= {An, Al, Au, El}

(C ∪ D)= {Al, Au, Be, El, An}

(A ∩ C)= {Al, Au}

(B ∩ D)= {An, El}

B\C= {An}

D\A= {Be, El}

(A ∩ D) ∪ (C\B)= {An, Al, Be}

{An,Al} ∪ {Al,Be}

Exercice 1.6 :

Utiliser la table des lois de l'algèbre des ensembles pour démontrer que :

(U ∩ A) ∪ (B ∩ A) = A

= (A ∩ U) ∪ (A ∩ B) = Commutativité

= A ∩ (U ∪ B) = Distributivité

= A ∩ U = Identité

= A = Identité

Exercice 1.7 :

Trouver le cardinal de chacun des ensembles suivants :

A = {lundi, mardi, …, dimanche} ; B = {x : x est une lettre du mot MATHEMATIQUES} ; C = {x : x^2=9, 2x=8} :

Card(A)= 7

Card(B)= {M, A, T, H, E, I, Q, U, S}

Card(C)= **{ Ø } = 0** *= (doit vérifier les 2 conditions* x^2=9, {3,-3}, 2x={4})

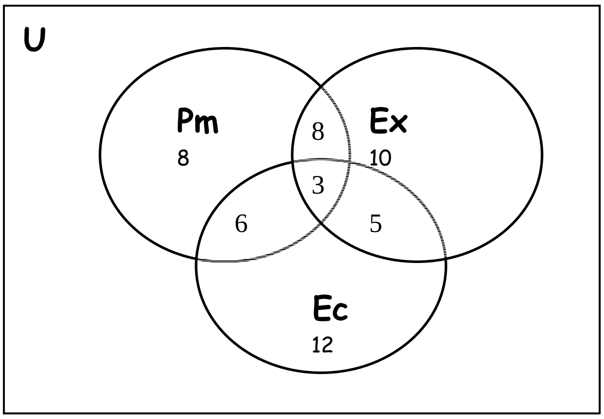
Exercice 1.8 :

Sur un échantillon de X personnes, nous avons trouvé :

25 lecteurs de Paris Match : Card(Pm) = 25
26 lecteurs de l'Express : Card(Ex) = 26
26 lecteurs des Echos : Card(Ec) = 26
9 lecteurs de Paris Match & des Echos :
Card(Pm ∩ Ec) = 9
11 lecteurs de Paris Match & de l'Express :
Card(Pm ∩ Ex) = 11
9 lecteurs de l'Express & des Echos :
Card(Ex ∩ Ec) = 8

8 personne n'en lisent aucun : Card(U) = 8

Card(Pm ∪ Ex ∪ Ec) = 52



Trouver le nombre de personnes lisant les 3 magasines, établir le diagramme de Venn ou vous compléterez chaque région. Déterminer alors le nombre de personnes qui ne lisent qu'un magasine.

Recherche :

Card(Pm ∩ Ec ∩ Ex) = Card(Pm ∪ Ex ∪ Ec)
-Card(Pm)-Card(Ex)-Card(Ec)
+Card(Pm ∩ Ec)+Card(Pm ∩ Ex)+Card(Ex∩ Ec)= 3
(52-25-26-26+9+11+8 = 3)

1 seul magasine = 8+12+10 = 30 personnes

Exercice 1.9 :

Dans une classe de première, sont étudiées les langues suivantes : l'anglais, l'allemand et l'espagnol. Chaque élève étudie au moins une langue, trouver l'effectif de cette classe :

5 élèves étudient les 3 langues	Card(A∩G∩E) = 5
7 étudient l'anglais et l'allemand	Card(A∩G) = 7
8 étudient l'anglais et l'espagnol	Card(A∩E) = 8
9 étudient l'allemand et l'espagnol	Card(G∩E) = 9
20 étudient l'anglais	Card(A) = 20
15 étudient l'allemand	Card(G) = 15
18 étudient l'espagnol	Card(E) = 18

A ∪ G ∪ E
EFFECTIF = 34